数理解析研究所講究録
第774巻 1992年 74-81

Mathematicaによる散乱問題の研究2 (ガンマ行列の積のトレースの計算について)

岡山理科大学理学部
応用数学科
坂本薫 (Sakamoto Kaoru)

1 概要

散乱の計算に現れるガンマ行列のトレースの一般的な計算，変換ルールによるテンソルの縮約，4次元運動量の内積の簡約について，組み込み関数が多く揃っている数式処理言語 Mathematica でプログラムを作成した．この作成されたプログラムで散乱の計算を扱うテキストの例が計算可能なように工夫された．積分の計算についてはまだなされてない．

2 序論

基本的にはガンマ行列は非可換であるので，この積は $A**B**\cdots Y**Z$ のように書き，それをリストに直され，処理され，非可換の積に直された。

3 ガンマ行列の積のトレースについて

3.1 ガンマ行列の積のトレースの漸化式[1]

$\gamma^\mu(\mu=0,1,2,3)$ は次の反交換関係を満たす．

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\ +\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}$$

ガンマ行列の積のトレースの計算は以上の関係を繰り返す。

$$tr(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_n})=2\sum_{k=2}^{n}(-1)^k g^{\mu_1\mu_n}tr(\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_{k-1}}\gamma^{\mu_{k+1}}\cdots\gamma^{\mu_n})$$

奇数個のガンマ行列の積のトレースはゼロで，偶数個のガンマ行列の積のトレースはゼロでない。二個のガンマ行列の積のトレース $tr(\gamma^\mu\gamma^\nu)$ は $4\gamma^{\mu\nu}$ である。以下のガンマ行列の積のトレースの計算は次の関係を使った．

$$tr(AB\cdots YZ)=tr(ZY\cdots BA)$$

$$tr(aA + bB \cdots + yY + zZ) = a\,tr(A) + b\,tr(B) \cdots + y\,tr(Y) + z\,tr(Z)$$

ここで，小文字のアルファベットは数式で，大文字のアルファベットは行列を表す．

3.2 ガンマ行列の積のトレースの計算法[1],[3]

ガンマ行列 $\gamma^n (n = 0, 1, 2, 3)$ は Mathematica では，Gamma[ui[n]] のように表現された．ui の引数は，それの上付きの添字を表される．ガンマ行列の積の順序は可換でないから，積の順序を換えないために，A**B**C あるいは，NonCommutiveMultiply[A,B,C] のように表される。関数 ProductList によって A**B**C から {A,B,C} が作られた．リストの i 番目の要素がリストから除かれ，除かれたリストにその要素が付加された．これをする関数は MakeNewlist である。

MakeNewlist[x_i_]:=Join[Take[x,i,i],Drop[x,{i,i}]]

$tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$であるので，二個のガンマ行列の積のトレースは次のように定義された．

TraceGamma[Gamma[ui[n_]] ** Gamma[ui[m_]]]:=4g[ui[n],ui[m]]

関数 TraceGamma はガンマ行列だけのトレースはゼロが返されるが，奇数個のガンマ行列の積のトレースにゼロを帰納的に返す事を示すために次のように定義された．

TraceGamma[Gamma[ui[i_]]]:=0

G が次のように定義され，ガンマ関数は以下のように再帰的に定義された．

G[Gamma[ui[i_]] ** Gamma[ui[j_]]]:=g[ui[i],ui[j]]

TraceGamma[y_]:=
Block[{x,imax,z,z1,z2,ans},
x=ProductList[y];z1:=First[x];z=Rest[x];imax=Length[z];
Return[Sum[(z2=MakeList[z,i];
(-1)^(i+1) * G[ans=z1*First[z2]]*If[Length[Rest[z2]]==1,
TraceGamma[First[Rest[z2]]],TraceGamma[Apply[NonCommutativeMultiply,
Rest[z2]]]]),i,imax]];]

ここで，非可換な積をリストに換える ProductList は次のように定義される。

ProductList[NonCommutaiveMultiply[x_]:=
Block[{imsax=Length[x],i=1,ans={}},
While[i <= imax,(ans=Append[ans,#[[i]] &[x]];i=i+1)];Return[ans]]

TraceGamma[Gamma[ui[1]]**Gamma[ui[2]]] は 4 g[ui[1],ui[2]] を
TraceGamma[Gamma[ui[1]]**Gamma[ui[2]]**Gamma[ui[3]] は 0 を
TraceGamma[Gamma[ui[1]]**Gamma[ui[2]]**Gamma[ui[3]]**Gamma[ui[4]] は 4 g[ui[1],ui[4]] g[ui[2],ui[3]] -4 g[ui[1],ui[3]] g[ui[2],ui[4]]
+ 4 g[ui[1],ui[2]] g[ui[3],ui[4]] を返した．

3.3 4 次元運動量が掛かったガンマ行列の積のトレースの計算

散乱の計算には，4 次元運動量とガンマ行列の内積　$p_\mu \gamma^\mu$ の積のトレースが現れる。ここでは，その内積を $slash[p]$ のように表した。そのトレースを計算する関数 TraceSlash0

は G の 代わりに次のように定義された G0 を使ってガンマ行列の積のトレースの計算をする関数 TraceGamma は修正して定義された．
G0[slash[p_]*slash[q_]]:=(p . q)
TraceSlash0[slash[p_]**slash[q_]:= 4 * (p . q)
TraceSlash0[slash[p_]:=0
Traceslash0[slash[a]**slash[b]**slash[c]**slash[d]] は 4 a . d b . c -
4 a . c b . d + 4 a . b c . d
を返した．

3.4 ガンマ行列を含む項の積の計算法 1 [1,2]

散乱の計算では，$(m + p_\mu \gamma^\mu)$ や $(m - p_\mu \gamma^\mu)$ や $p_\mu \gamma^\mu$ の項の積のトレースが現れる．これらの項を $(m + slash[p])$ や $slash[q]$ で表す．その積を計算するには，$slash[p]$ の形の式の順序を換えないで，前に m 等の定数を置いて積の和として展開する．各々の積をトレースをとって和が作られる．以上のようにして，関数 TraceSlash は定義された．
TraceSlash[(m+slash[a])**(m+slash[b])] は $4m^2 + 4a \cdot b$ を返した．

3.5 ガンマ行列を含む項の積の計算法 2 [1],[2]

前節における積の中に添え字の位置が下付きのガンマ行列が単独で現れる場合がある．これを以前の計算と同様にするために次のような工夫がなされた．

$$\gamma_\mu = g_{\mu\alpha} \gamma^\alpha N \equiv g_{\mu\alpha} slash[N]$$

ここで，N は添え字 μ に対する成分が 1 でその他はゼロである．この関係を使って，計算法 1 に得られた内積を変換するために次のルールを追加した．

$$\begin{aligned} ScalarTransRule \ := \ & \{(gamma[li[mu\_]\ .\ k\_) -> k[li[mu]], \\ & (kk\_\ .\ gamma[li[nu\_]]) -> kk[li[nu]], \\ & (gamma[li[mmu\_]]\ .\ kkk\_) -> kkk[li[mmu]], \\ & (gamma[li[mmmu\_]]\ .\ gamma[li[nnnu\_]]) -> g[li[mmmu], li[nnnu]]\} \end{aligned}$$

3.6 ガンマ行列 γ_5 を含むトレースの計算法 [1],[2]

γ_5 は $i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ で定義される．これは，Mathematica では、次のように定義された．
$gamma[li[5]] := I**slash[gamma[ui[0]]]**slash[gamma[ui[1]]]**slash[gamma[ui[2]]**$
$*slash[gamma[ui[3]]]$
これが計算されるとき，$i \neq j$ のとき $g^{i,j} = 0$,$g^{0,0} = 1$,$g^{1,1} = -1$, $g^{2,2} = -1$,$g^{3,3} = -1$ を使うために次のように Mathematica で表された．

$g[ui[m\_], ui[n\_]] := 0/; (IntegerQ[m]\&\&IntegerQ[n]\&\&m =! = n)$
$g[ui[m\_], ui[m\_]] := 1/; (IntegerQ[m]\&\&m == 0)$
$g[ui[m\_], ui[m\_]] := -1/; (IntegerQ[m]\&\&m =! = 0)$
$TraceSlash[gamma[ui[5]]{*}{*}gamma[ui[5]]]$ は 4 を返し，$TraceSlash[gamma[ui[5]]{*}{*}slash[a]]$，$TraceSlash[gamma[ui[5]]{*}{*}slash[a]{*}{*}slash[b]]$，$TraceSlash[gamma[ui[5]]{*}{*}slash[a]{*}{*}slash[b]{*}{*}slash[c]]]$，$TraceSlash[gamma[li[5]]{*}{*}slash[a]{*}{*}slash[b]{*}{*}slash[c]]$ は 0 を返した．$TraceSlash[gamma[li[5]]{*}{*}slash[a]{*}{*}slash[b]{*}{*}slash[c]{*}{*}slash[d]]$ は以下の式を返した．
$4Ia[li[3]]b[li[2]]c[li[1]]d[li[0]]$
$-4Ia[li[2]]b[li[3]]c[li[1]]d[li[0]]$
$-4Ia[li[3]]b[li[1]]c[li[2]]d[li[0]]$
$+4Ia[li[1]]b[li[3]]c[li[2]]d[li[0]]$
$+4Ia[li[2]]b[li[1]]c[li[3]]d[li[0]]$
$-4Ia[li[1]]b[li[2]]c[li[3]]d[li[0]]$
$-4Ia[li[3]]b[li[2]]c[li[0]]d[li[1]]$
$+4Ia[li[2]]b[li[3]]c[li[0]]d[li[1]]$
$+4Ia[li[3]]b[li[0]]c[li[2]]d[li[1]]$
$-4Ia[li[0]]b[li[3]]c[li[2]]d[li[1]]$
$-4Ia[li[2]]b[li[0]]c[li[3]]d[li[1]]$
$-4Ia[li[0]]b[li[2]]c[li[3]]d[li[1]]$
$+4Ia[li[3]]b[li[1]]c[li[0]]d[li[2]]$
$-4Ia[li[1]]b[li[3]]c[li[0]]d[li[2]]$
$-4Ia[li[3]]b[li[0]]c[li[1]]d[li[2]]$
$+4Ia[li[0]]b[li[3]]c[li[1]]d[li[2]]$
$+4Ia[li[1]]b[li[0]]c[li[3]]d[li[2]]$
$-4Ia[li[0]]b[li[1]]c[li[3]]d[li[2]]$
$-4Ia[li[2]]b[li[1]]c[li[0]]d[li[3]]$
$+4Ia[li[1]]b[li[2]]c[li[0]]d[li[3]]$
$+4Ia[li[2]]b[li[0]]c[li[1]]d[li[3]]$
$-4Ia[li[0]]b[li[2]]c[li[1]]d[li[3]]$
$-4Ia[li[1]]b[li[0]]c[li[2]]d[li[3]]$
$+4Ia[li[0]]b[li[1]]c[li[2]]d[li[3]]$
このトレースは，纏めて次のように書かれる．

$$4i\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}$$

4 スカラー積の簡約について[1],[2],[3]

4.1 スカラー積を簡約する方法

4次元ベクトル a , b のスカラー積 (a . b) は次のような関係がある.

$$(a\ .\ b) = (b\ .\ a)$$

スカラー積の和を上の関係式を使って式を簡約する関数は次のように書かれる.

```
ScalarProductContract[x_]:=
Block[{imax,list=SumToList[x],ans },
imax=Length[list];
Unprotect[Dot];     ans=Sum[(ans=list[[i]] //.
(b_ . a_) -> (a . b)),
{i,imax}];
Protect[Dot];
Return[ans]]
```

ScalarProductContract[(a . b)+(b . a)] は 2 (a . b) を返した.

4.2 スカラー積を含む一般の式をスカラー積について簡約する方法

スカラー積を含む式を簡約するには, (k[2] . k[1]) -> (k[1] . k[2]) のようにスカラー積を置き換える必要がある. これは条件付きルールを使用する.

$$\begin{array}{lll} (k[N1\_]\ .\ k[N2\_]) :> (k[N1]\ .\ k[N2]) & & \text{変換ルール} \\ \quad /;\ N1 > N2 & & \text{条件} \end{array}$$

条件付きルールは次のように書かれた.

$$\begin{aligned} ScalarConditionRule1 \;=\; & \{(k[n1\_]\ .\ k[n2\_]) :> (k[n2]\ .\ k[n1])/; n1 > n2 \\ & (p[nn1\_]\ .\ p[nn2\_]) :> (p[nn2]\ .\ p[nn1])/; nn1 > nn2\} \end{aligned}$$

一般のスカラー積を含む式をスカラー積について簡約する関数は以下のように書かれる.

```
ScalarContract[x_]:=
Block[{imax,y=Expand[x],list,ans},
list=SumToList[y];
imax=Length[list];
Unprotect[Dot];
ans=Sum[(ans=list[[i]] //. ScalarConditionRule1),{i,imax}];
Protect[Dot];
Return[ans]]
```

ScalarContract[((k[1] . k[2])+(k[2] . k[1]))* ((p[1] . p[2])+ (p[2] . p[1]))] は 4 (k[1] . k[2])(p[1] . p[2]) を返した．
又，(p . p) はもし p が電子の 4 次元運動量を表すとき m^2 で，光子のそれを表すとき，0 と定義される． ここで，m は電子の静止質量である．

5 テンソルの縮約について[1],[2],[3]

5.1 テンソルの簡約する方法

散乱の計算には，テンソルの積が現れるので，テンソルの縮約が必要である．Mathematica では，このような縮約をするとき，変換則を式に適用すればよい．変換則が一つの場合，次のように書かれる．

$$expr/.lhs- > rhs$$

変換則が 1 つでない場合，次のように書かれる．

$$expr/.\{lhs_1- > rhs1, lhs_2- > rhs_2, \cdots\}$$

式が変化されなくなるまで，変換則を式に適用するとき，次のように書かれる．

$$expr//.rules$$

5.2 テンソルの縮約についてのルールの例

$$\begin{cases} g_{ab}g^{ab} \to 4 \\ k_a p^a \to (k\ .\ p) \\ g_{ab}p^a p^b \to (p\ .\ p) \end{cases}$$ の縮約を実現するルールは以下のように書かれる．

$$\begin{aligned} TensorContractRule \ := \ & \{gamma[li[a\_], li[b\_]] * g[ui[a\_], ui[b\_]]- > 4, \\ & k[li[aa\_]][i\_] * p[ui[aa\_]][j\_]- > (k[i]\ .\ p[j]), \\ & gamma[li[aaa\_], li[bbb\_]] * p[ui[aaa\_]][ii\_] * p[ui[bbb\_]][iii\_] \\ & \quad - > (p[ii]\ .\ p[iii])\} \end{aligned}$$

ここで i 番目の 4 次元運動量を k[i] とする．数式は積の和に展開され，各々の積を変換ルールを使用して変換した後，和を取る．その和は簡約された数式である．テンソルを簡約する変換則は次のように分けられた．
TensorContractionRule1:={g[li[a_],li[b_]]*g[ui[a_],ui[b_]] − >4 }
TensorContractionRule2:=
{k1_[li[a_]][i1_]*p1_[ui[a_]][j1_] − > (k1[i1] . p1[j1]),
k2_[li[a1_]][i2_]*p2_[ui[a1_]][i2_] − > (k2[i2] . p2[i2]) }

```
TensorContractionRule3:=
{g[li[a_],li[b_]]*p_[ui[a_]][ii_]*k_[ui[b_]][jj_] - > (p[ii] . k[jj]),
g[li[a1_],li[b1_]]*p1_[ui[a1_]][i1_]*k1_[ui[b1_]][i1_]
- >(p1[i1] . k1[i1]),
g[li[a2_],li[b2_]]*p2_[ui[a_]][i1_]* p2_[ui[b2_]][i2_]
- >(p2[i1] . p2[i2]),
TensorContractionRule4:=
{g[ui[a_],ui[b_]]*p_[li[a_]][i_]*p_[li[b_]][j_]- >(p[i] . p[j]) }
```

式を縮約する関数は次のように書かれた.

```
TensorContract1[x_]:= Block[{ans},
ans=TensorContract2[x,TensorContractionRule1];
ans=TensorContract2[ans,TensorContractionRule2];
ans=TensorContract2[ans,TensorContractionRule3];
ans=TensorContract2[ans,TensorContractionRule4];
Return[ans]]

TensorContract2[x_,rule_]:=
x //. rule

TensorContract[x_]:=
Block[{y=SumToList[Expand[x]],imax },
imax=Length[y];
Return[Sum[(
z=TensorContract1[y[[i]]]),{i,imax}]]]
```

テンソルを含んだ式

```
In[61]:=In[61]:=
          2
         q  g[li[mu],li[nu]]
Out[61]=(------------------ + k[li[mu]][2] k[li[nu]][1] +
                  2
>       k[li[mu]][1] k[li[nu]][2])
          2
         q  g[ui[mu],ui[nu]]
>       (------------------ + 2 p[ui[mu]] p[ui[nu]][1])
                  2
```

縮約された式

```
                2                  2
           4   q    k[1] . k[2]   q     k[2] . k[1]
Out[62]= q   + ------------- + ----------------- +
                      2                 2

                                                 2
>        2   p    k[1] . p[1] k[2] . p[1] + q      p[1] . p[1]
```

6 結論

散乱の計算に現れるガンマ行列の積のトレースの一般的な計算，変換ルールによるテンソルの縮約，４次元運動量の簡約にする方法について，Mathmatica でのプログラミングの方法について述べた． 実際の計算と積分の計算について研究中である．

参考文献

[1] 中西譲，新物理学シリーズ１９，場の量子論，培風館，１９７５年.

[2] I.J.R. エイチスン，A.J.G. ヘイ（藤井昭彦訳），ゲージ理論入門 I －電磁相互作用，講談社 サイエンティフィク，１９８２.

[3] Stephen Wolfram,Mathematica(A system for Doing Mathematica by Computer) Second Edition,Addison Wesley,1991.